# Lezione 3

## $\boxed{\text{K-FORME}}$

⊙ Ricevimento: venerdì 16

$M^n$ varietà

$0 \leq K \leq n$

$\Lambda^k(M) =$ FIBRATO DELLE K-FORME su $M$

$$\Lambda^k(M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$$

**Def:** Una K-FORMA è una sezione di $\Lambda^k(M)$

Cioè se $\omega$ k-forma allora

$\forall p \in M \quad \omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)$

cioè $\quad \omega(p) : T_pM \times \dots \times T_pM \to \mathbb{R}$

$\underbrace{\hspace{6cm}}_{K}$ antisimmetrica

<u>Def</u>: $\mathfrak{X}(M) = \{\text{campi su } M\} = \Gamma TM$

$$\Omega^k(M) = \{k\text{-forme su } M\} = \Gamma \Lambda^k(M)$$

è spazio vettoriale

$$\omega \in \Omega^k(M) \quad , \eta \in \Omega^h(M) \longrightarrow \omega \wedge \eta \in \Omega^{k+h}(M)$$

Questo prodotto è associativo

è anti-commutativo

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{hk} \eta \wedge \omega \quad \Rightarrow \text{ Se } k \text{ è dispari}$$

$$\omega \wedge \omega = 0$$

In coordinate: $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$\omega \in \Omega^k(U)$ si scrive in modo unico così:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} f_{i_1, \dots, i_k}(x) \, \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{}$$

base di $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ha dimensione $\binom{n}{k}$

$$dx^i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$$

è il differenziale di $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$y \longmapsto y^i$$

Se cambio coordinate: $x \dashrightarrow \bar{x}$

**Oss**

$dx^i \wedge dx^i = 0$

$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j \quad \leftarrow \text{covettori}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \quad \leftarrow \text{vettori}$$

$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$ $\qquad$ $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{n} = 1$

Ogni $\omega \in \Omega^n(U)$ si scrive $\boxed{\omega = f(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$

Prop: Se cambiamo coordinate $x \dashrightarrow \bar{x}$ otteniamo

$$\omega = f(\bar{x}) \cdot \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right) d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$$

n-forma $\neq$ funzione $=$ 0-forma

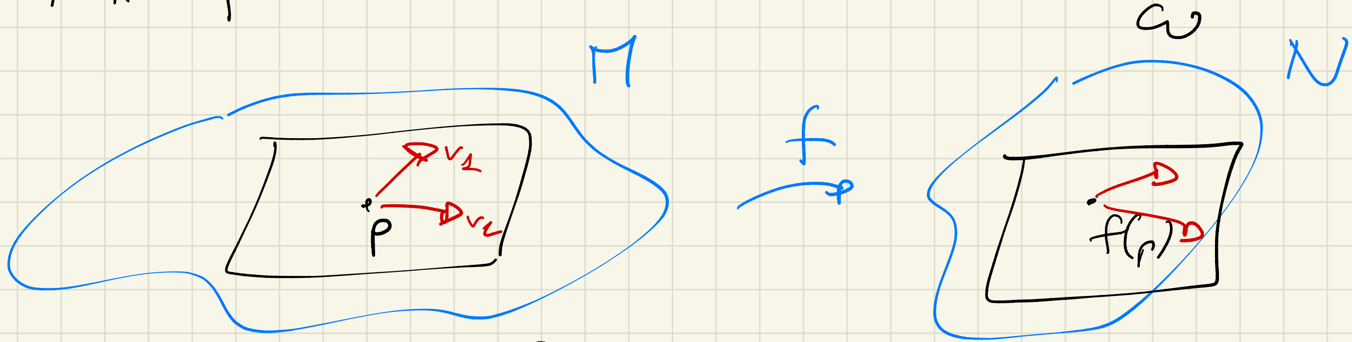
PULL-BACK: $\quad f : M^m \to N^n$ LISCIA

Data $\omega \in \Omega^k(N)$ k-forma

$\dashrightarrow$ $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ k-forma PULL-BACK di $\omega$ tramite $f$

Funziona con tutti i campi tensoriali di tipo $(0,k)$

$$\forall p \in M \quad (f^*\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$
$\forall v_1, \ldots, v_k \in T_pM$




$f^*\omega = ?$

Pull-back in carte: $\quad f : U \to V \qquad U \subseteq \mathbb{R}^m \quad V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\omega \in \Omega^k(V)$$

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} g_{i_1 \dots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\Omega^k(U) \ni f^*\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} g \circ f \, df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}$$

$$f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f = (f^1, \dots, f^n)$$

$$f^i : U \to \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^3$

- funzioni = 0-forme
- 1-forma : $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ $\quad f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- 2-forma: $\omega = f\,dx \wedge dy + g\,dy \wedge dz + h\,dx \wedge dz$
- 3-forma: $\omega = f\,dx \wedge dy \wedge dz$

$\mathbb{R}^4 \quad x, y, z, t$ 2-forma :

$$\omega = f\, dx \wedge dy + g\, dx \wedge dz + h\, dx \wedge dt$$
$$+ a\, dy \wedge dz + b\, dy \wedge dt + c\, dz \wedge dt$$

Es: $2xy\,dx + 3z\,dy - dz = \omega$

$\eta = 2 dx \wedge dy$

$$\omega \wedge \eta = (2xy\,dx + 3z\,dy - dz) \wedge (2 dx \wedge dy)$$

$$= 4xy \underbrace{dx \wedge dx}_{= 0} \wedge dy + 6z \underbrace{dy \wedge dx \wedge dy}_{= 0}$$

$$- 2 dz \wedge dx \wedge dy = +2\, dx \wedge dz \wedge dy$$
$$= -2\, dx \wedge dy \wedge dz$$

# INTEGRALI

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\qquad \omega \in \Omega^n(V)$

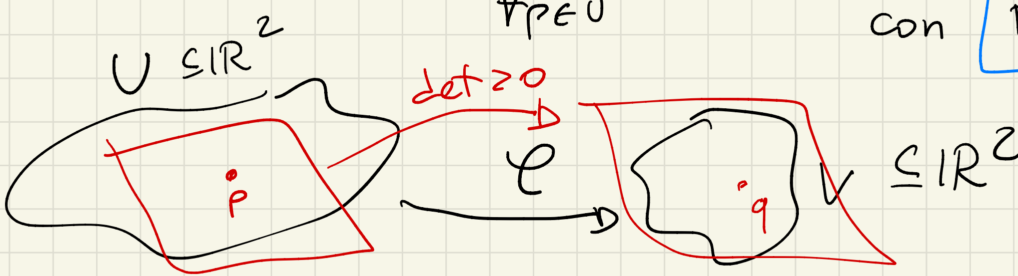
$$\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Def: $\displaystyle\int_V \omega := \int_V f$

Oss: $\varphi : U \to V$ diffeo che PRESERVA L'ORIENTAZIONE

cioè $\underbrace{\phantom{x}}_{\forall p \in U} d\varphi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isom.

con $\boxed{\text{DET} > 0}$



**Oss:** Se $U$ è connesso, basta verificare che $\det > 0$ c.p.a. in un punto $p$.

**Prop:** $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\qquad \omega \in \Omega^n(V)$

$U \subseteq \mathbb{R}^n \quad \varphi : U \to V$ diffeo$^+$ ← pres. ori

$$\boxed{\int_U \varphi^*(\omega) = \int_V \omega}$$

**dim:** $\omega$ cambia come richiesto dal teorema

$$\int f \, dx^1 - dx^n = \int f |J| \, dy^1 - dy^n$$

qui si usa che $\varphi \in$ diffeo$^+$

Scopo: $M^n$ qualsiasi $\omega \in \Omega^n(M)$

DEFINIRE $\displaystyle\int_M \omega$

Se $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto OK

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \qquad \int_U \omega = \int_U f$$

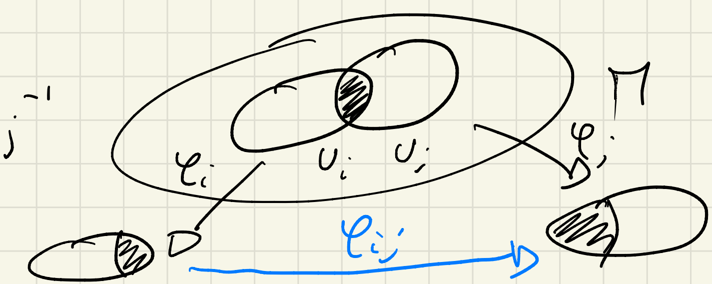
## VARIETÀ ORIENTABILI

Def: $M^n$ varietà. Un atlante $\mathcal{A} = \{ \underbrace{\varphi_i : U_i \to V_i}_{\text{CARTE}} \}$

è ORIENTATO se

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$$

preservano l'orientazione $\forall i,j$



M è **ORIENTATA** se è dotata di un atlante orientato

è **ORIENTABILE** " può essere " " " "

**Es:**

- $\mathbb{R}^n$ è orientato $\quad \mathcal{A} = \{ id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \}$
- $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ è orientabile

  **Es:** costruire un atlante orientato

- $\mathbb{RP}^n$ spazio proiettivo reale è orientabile $\Leftrightarrow$ n dispari

$\mathbb{RP}^2$ <u>non</u> è orientabile

Bottiglia di Klein " " "

Nastro di Möbius non è orientabile

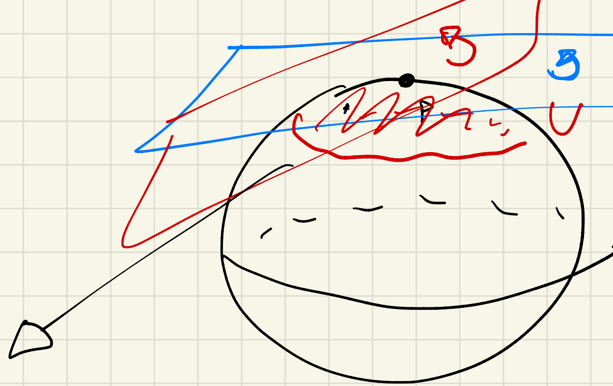
<u>Definizione alternativa</u>: $V$ sp. vett. di dim $n$ reale

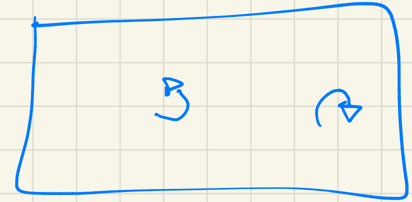
$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di $V$ sono COORIENTATE se la matrice $M$ di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha $\det M > 0$

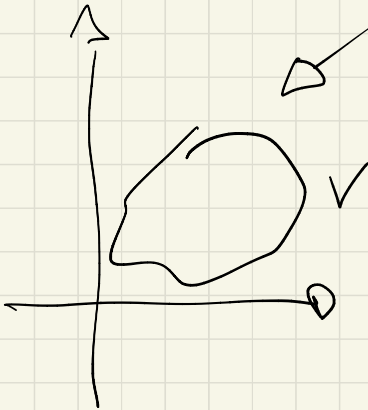
Es: $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ è rel. eq. che induce una partizione dell'insieme delle basi di $V$ in 2 insiemi

Def: Una ORIENTAZIONE per $V$ è la scelta di chiamare $+$ un insieme

Def 2: $M^n$ varietà. Una ORIENTAZIONE per $M$ è l'attribuzione di una orientazione a ogni $T_pM$ $\forall p \in M$ che sia localmente coerente $\star$






★ $\forall p \in M \quad \exists\ U(p) \xrightarrow[\varphi]{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$

CARTA

t.c. $d\varphi_q : T_q M \to T_{\varphi(q)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

$\forall q \in U(p)$ manda basi positive in basi positive

## INTEGRALI

Def: $M^n$ ORIENTATA $\quad \omega \in \Omega^n(M)$ con SUPPORTO COMPATTO

Si può definire $\int_M \omega$

<u>così</u>:

<u>Def</u>: Il SUPPORTO di un campo tensoriale è la chiusura dell'insieme $\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}$

<u>Oss</u>: Se $M$ è cpt allora $\omega$ è sempre a supporto cpt